А.П. Стахов

Три «ключевые» проблемы математики на этапе ее зарождения и новые направления в развитии математики, теоретической физики и информатики

Аннотация

На этапе зарождения математики ее развитие стимулировалось тремя «ключевыми» проблемами – *счета, измерения и гармонии.* Первые две проблемы привели к обоснованию двух фундаментальных математических понятий – *натуральных чисел и иррациональных чисел,* которые и были положены в основу «классической математики». «Проблема гармонии», связанная с «золотым сечением», всячески игнорировалась «материалистической» наукой и «классической математикой», и это направление развивалось в изоляции от «классической науки». И только на рубеже 20-21-го столетий удалось завершить создание «Математики Гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки, которая открывает новые пути в развитии математики, теоретической физики и информатики.

1. Основные этапы в развитии математики

Что такое математика? Для ответа на этот вопрос обратимся к книге «Математика в ее историческом развитии» [1], написанной выдающимся российским математиком академиком А.Н. Колмогоровым. Раздел первый «Развивающаяся наука» посвящен развитию математики. Именно этот раздел составляет основу статьи «Математика», написанной А.Н. Колмогоровым для второго издания Большой Советской Энциклопедии [2].

Согласно Колмогорову математика - это *«наука о количественных отношениях и пространственных формах действительного мира».*

Колмогоров отмечает, что *«ясное понимание самостоятельного положения математики как особой науки, имеющей собственный предмет и метод, стало возможным только после накопления достаточно большого фактического материала и возникло впервые в Древней Греции в 6-5 вв. до н.э.».*

Колмогоров выделяет следующие этапы в развитии математики:

(1) **Период зарождения математики**, предшествующий греческой математике.

(2) **Период элементарной математики**. Начало этого периода Колмогоров относит к 6-5 вв. до н.э., а его завершение к 17 в. Запас знаний, которые имела математика до начала 17 в., составляет и до настоящего времени основу «элементарной математики», преподаваемой в начальной и средней школе.

(3) **Период математики переменных величин**, который можно условно назвать **периодом «высшей математики».** Этот период начинается с употребления переменных величин в аналитической геометрии Р. Декарта и создания *дифференциального и интегрального исчисления.*

(4) Период современной математики. Началом этого периода Колмогоров считает создание Н.И. Лобачевским так называемой «воображаемой геометрии», которая положила начало расширению круга количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой. Развитие подобного рода исследований внесло в строение математики столь важные новые черты, что математику 19 и 20 веков естественно отнести к особому *периоду современной математики*.

2. Проблема счета – первая «ключевая» проблема античной математики

На этапе зарождения математики Колмогоров выделяет несколько «ключевых» проблем, которые стимулировали развитие математики и возникновение ее фундаментальных понятий. Первая из них – это **проблема счета.** Как подчеркивается в [1], *«счет предметов на самых ранних ступенях развития культуры привел к созданию простейших понятий арифметики натуральных чисел. Только на основе разработанной системы устного счисления возникают письменные системы счисления и постепенно вырабатываются приемы выполнения над натуральными числами четырех арифметических действий».*

На этапе зарождения математики было сделано одно из крупнейших, то есть, «ключевых» математических открытий. Речь идет о *позиционном принципе представления чисел.* Как подчеркивается в статье [3], *«первой известной нам системой счисления, основанной на поместном или позиционном принципе, является шестидесятеричная система древних вавилонян, возникшая примерно за 2000 лет до н.э.».* Именно это открытие лежит в основе всех ранних систем счисления, которые были созданы на этапе зарождения математики и в период элементарной математики (включая Вавилонскую 60-ричную систему, десятичную и двоичную и другие системы счисления).

Каждый человек на земном шаре, окончивший хотя бы четыре класса начальной или «церковно-приходской» школы, знает, по меньшей мере, две полезные вещи: он умеет писать и читать и использовать *десятичную систему счисления* для выполнения простейших арифметических операций. И эта система кажется нам настолько простой и элементарной, что многие из нас с большим недоверием отнесутся к утверждению, что десятичная система является одним из *крупнейших математических открытий за всю историю математики.* И чтобы убедить читателя в этом, обратимся к мнению «авторитетов».

Пьер Симон Лаплас (1749-1827), французский математик, член Парижской академии наук, почетный иностранный член Петербургской академии наук:

«Мысль выражать все числа 9 знаками, придавая им, кроме значения по форме, еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Как нелегко было прийти к этой методе, мы видим на примере величайших гениев греческой учености Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой».

М.В. Остроградский (1801-1862), русский математик, член Петербургской академии наук и многих иностранных академий:

«Нам кажется, что после изобретения письменности самым большим открытием было использование так называемой десятичной системы счисления. Мы хотим сказать, что соглашение, с помощью которого мы можем выразить все полезные числа двенадцатью словами и их окончаниями, является одним из самых замечательных созданий человеческого гения ...»

Жюль Таннери (1848-1910), французский математик, член Парижской академии наук:

«Что касается до нынешней системы письменной нумерации, в которой употребляется девять значащих цифр и ноль, и относительное значение цифр определяется особым правилом, то эта система была введена в Индии в эпоху, которая не определена точно, но, по-видимому, после христианской эры. Изобретение этой системы есть одно из самых важных событий в истории науки, и несмотря на привычку пользоваться десятичной нумерацией, мы не можем не изумляться чудной простоте ее механизма».

Следует отметить, что позиционный принцип представления чисел и вытекающие из них позиционные системы счисления (в частности, двоичная система), созданные на этапе зарождения математики, стали одной из «ключевых» идей современных компьютеров. В этой связи стоит также напомнить, что алгоритмы умножения и деления чисел, лежащие в основе современных компьютеров, созданы древними египтянами («метод удвоения») [1]. Однако, главным итогом развития арифметики на этапе зарождения математики является формирование понятия **натурального числа,** которое является одним из важнейших и фундаментальных понятий математики, без которого немыслимо существование самой математики. Для изучения свойств натуральных чисел еще в античный период возникает **теория чисел,** одна из фундаментальных теорий математической науки.

3. Проблема измерения – вторая «ключевая» проблема античной математики

Вторая «ключевая» проблема, стимулировавшая развитие математики на стадии ее зарождения – это **проблема измерения.** Как подчеркивает Колмогоров, *«потребности измерения (количества зерна, длины дороги и т.д.) приводят к появлению названий и обозначений простейших дробных чисел и к разработке приемов выполнения арифметических действий над дробями ... Измерение площадей и объемов, потребности строительной техники, а несколько позднее – астрономии, вызывают развитие начатков геометрии».*

«Ключевым» математическим открытием в этой области по праву считается открытие ***«несоизмеримых отрезков».*** Считается, что это открытие было сделано в 5-м веке до н.э. в научной школе Пифагора при исследовании отношения диагонали к стороне квадрата. Методом от противного пифагорейцам удалось доказать, что рассматриваемое отношение, равное $\sqrt{2}$, не может быть выражено в виде отношения двух натуральных чисел, и такие отрезки были названы *несоизмеримыми,* а числа, выражающие подобные отношения, были названы *иррациональными.*

Открытие «несоизмеримых отрезков» стало поворотным пунктом в развитии математики. Благодаря этому открытию в математику вошло понятие **иррационального числа,** второго (после натуральных чисел) фундаментального понятие математики. Для преодоления первого кризиса в основаниях математики, вызванного открытием «несоизмеримых отрезков», выдающийся геометр Евдокс разработал **теорию величин,** которая позже трансформировалась в **математическую теорию измерения** [4], еще одну фундаментальную теорию математической науки. К этой теории, основным результатом которой является формирование понятие **иррационального числа,** в конечном итоге, восходит вся **непрерывная математика**, включая дифференциальное и интегральное исчисление.

Влияние «проблемы измерения» на развитие математики настолько велико, что это дало право болгарскому математику академику Илиеву заявить, что *«на протяжении первой эпохи своего развития – от античности и вплоть до открытия дифференциального и интегрального исчисления – математика, исследуя в первую очередь проблемы измерения величин, создала геометрию Евклида и учение о числах»* [5].

Таким образом, две «ключевые» идеи античной математики – *проблема счета и проблема измерения* – привели к формированию двух фундаментальных понятий математики – понятия *натурального числа* и понятия *иррационального числа*, которые вместе с *теорией чисел, позиционными системами счисления и теорией измерения* и стали тем фундаментом, на котором позже была построена вся «классическая математика», а затем «классическая теоретическая физика» и «классическая информатика».

4. «Проблема Гармонии» в истории науки

Деление в крайнем и среднем отношении

Однако, в античной науке существовала еще одна «ключевая» проблема, о которой не упоминает А.Н. Колмогоров и которая сыграла фундаментальную роль в развитии науки, в том числе, математики. Речь идет о «проблеме гармонии», которую, начиная с античного периода, постоянно держит в поле зрения исследовательская мысль. С этим периодом человеческой культуры связывают также разработку первых математических способов выражения пропорций в строении естественных систем. Именно к античному периоду относится «ключевое» открытие в этой области – формулировка **задачи о делении в крайнем и среднем отношении,** получившей позже название **золотого сечения.** Гениальный русский философ Алексей Лосев оценил основные достижения древних греков в этой области в следующих словах [6]: *"С точки зрения Платона, да и вообще с точки зрения всей античной космологии мир представляет собой некое пропорциональное целое, подчиняющееся закону гармонического деления - золотого сечения... Их (древних греков) систему космических пропорций нередко в литературе изображают как курьезный результат безудержной и дикой фантазии. В такого рода объяснениях сквозит антинаучная беспомощность тех, кто это заявляет. Однако понять данный историко-эстетический феномен можно только в связи с целостным пониманием истории, то есть, используя диалектико-материалистическое представление о культуре и ища ответа в особенностях античного общественного бытия».*

В этой связи уместно рассмотреть «Начала» Евклида именно с этой точки зрения, то есть, с точки зрения «проблемы гармонии». Как известно [7], 13-я, то есть заключительная книга «Начал» Евклида, посвящена изложению теории Платоновых тел, которые выражали гармонию Вселенной в космологии Платона. Этот факт породил весьма распространенную гипотезу о том, что главная цель, которую преследовал Пифагор при написании своих «Начал», состояла в том, чтобы дать описание теории Платоновых тел, то есть, главных «гармонических» фигур Мироздания. Но чтобы дать завершенную геометрическую теорию Платоновых тел, в частности *Додекаэдра,* Евклиду понадобилось ввести в в Книге II задачу о **«делении в крайнем и среднем отношении»** (Теорема II, 11), которую можно считать **«ключевым» математическом открытием в развитии «проблемы гармонии»**. Такое деление, названное позже «золотым сечением», было использовано Евклидом для геометрического построения равнобедренного треугольника с углами 72°, 72° и 36° («золотого» равнобедренного треугольника), регулярного пятиугольника (пентагона) и затем *Додекаэдра,* основанного на «золотом сечении». Таким образом, нет никаких сомнений в том, что знаменитая **«Пифагорейская Доктрина о Числовой Гармонии Мироздания»** была воплощена в величайшем математическом сочинении античной науки, «Началах» Евклида, то есть, с этой точки зрения **«Начала» Евклида можно рассматривать, как первую попытку построить «Математическую Теорию Гармонии», что было едва ли не главной идеей греческой науки.** Как подчеркивает Э.М. Сороко [8], *«впервые в истории последовательное представление о мире как внутренне противоречивом, гармоничном целом было выработано древними греками. Основное достижение античной мысли – обнаружение всеобщей и повсеместной связи природы, отношения, соединяющего все ее элементы в одно великое биполярное целое. С одной стороны, это макрокосмос, а с другой – микрокосмос, человек как «маленькая вселенная», говоря современным языком, голограммно несущая в себе всю «маточная» универсальность и полноту великого мира природы, космоса, «большой вселенной».*

В процессе своего исторического развития «классическая математика» потеряла «гармоническую идею» Пифагора и Платона, воплощенную Евклидом в своих «Началах». В результате математика оказалась разделенной на ряд математических теорий (геометрия, теория чисел, алгебра, дифференциальное и интегральное исчисление и т.д.). **К сожалению, значение «золотого сечения» было незаслуженно принижено в современной математике и теоретической физике. Для многих современных математиков «золотое сечение» напоминает «красивую сказку», которая не имеет никакого отношения к серьезной математике.**

Числа Фибоначчи

Тем не менее, несмотря на негативное отношение «материалистической» математики к «золотому сечению», ее теория продолжала развиваться. В 13 в. в математику были введены знаменитые *числа Фибоначчи* 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 32, … , открытые итальянским математиком Леонардо из Пизы (Фибоначчи) при решении *задачи о размножении кроликов.* Следует отметить, что *рекуррентное соотношение Фибоначчи* считается первой в истории математики рекуррентной формулой, то есть Фибоначчи своим открытием предвосхитил *метод рекуррентных соотношений,* один из наиболее мощных методов комбинаторного анализа. Позже числа Фибоначчи были обнаружены во многих природных объектах и явлениях, в частности, в ботаническом явлении *филлотаксиса.*

Первая в истории науки книга по золотому сечению

В эпоху Итальянского Возрождения интерес к «золотому сечению», как одному из важных геометрических открытий, возникает с новой силой. Универсальный гений Возрождения Леонардо да Винчи никак не мог пройти мимо «деления отрезка в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение»). Существует мнение [8], что именно Леонардо ввел в культуру Возрождения сам термин «золотое сечение». Под непосредственным влиянием Леонардо выдающийся итальянский математик Лука Пачиоли опубликовал в 1509 г. книгу “Divina Proportione”, первую в мировой истории специальную книгу по золотому сечению.

Кеплер о золотом сечении

В 17 в. гениальный астроном и математик Иоганн Кеплер создал оригинальную геометрическую модель Солнечной системы, основанную на Платоновых телах. Свое восхищение «золотым сечением» он выразил в следующих словах: *«В геометрии существует два сокровища – теорема Пифагора и деление отрезка в крайнем и среднем отношении. Первое можно сравнить с ценностью золота, второе можно назвать драгоценным камнем».*

Исследования Люка, Бине и Феликса Клейна

После смерти Кеплера о «золотом сечении», одном из двух «сокровищ геометрии», забывают. И такое странное забвение продолжается в течение двух столетий. Активный интерес к «золотому сечению» вновь возрождается в математике только в 19-м столетии. В этот период математические работы, посвященные числам Фибоначчи и золотому сечению, по меткому выражению одного математика, *«начинают размножаться, как кролики Фибоначчи».* Французские математики Люка и Бине становятся лидерами этих исследований в 19-м веке. Люка вводит в математику сам термин «Числа Фибоначчи», а также понятие «обобщенных последовательностей Фибоначчи», одной из которых являются *числа Люка* 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... Бине выводит знаменитые *формулы Бине,* которые связывают золотое сечение с числами Фибоначчи и Люка. В 19-м веке выдающийся немецкий математик Феликс Клейн попытался объединить все области математики на основе икосаэдра, Платонового тела, дуального додекаэдру. **Клейн трактует икосаэдр, основанный на золотом сечении, как геометрический объект, из которого вытекают ветви пяти математических теорий: *геометрии, теории Галуа, теории групп, теории инвариантов и дифференциальные уравнения.* Главная идея Клейна предельно проста: *"Каждый уникальный геометрический объект так или иначе связан со свойствами икосаэдра».*** К сожалению, эта замечательная идея не была реализована в математике.

Золотое сечение и числа Фибоначчи в математике 20-го века

Во второй половине 20-го века интерес к числам Фибоначчи и золотому сечению в математике возрождается с новой силой. Русский математик Николай Воробьев был первым математиком, который почувствовал новые тенденции в математике. Его брошюра «Числа Фибоначчи» [9], опубликованная в 1961 г., стала научным бестселлером 20-го века и была переведена на многие языки. В 1963 г. Группа американских математиков во главе с Вернером Хоггаттом организовала Фибоначчи-Ассоциацию и начала издавать математический журнал “The Fibonacci Quarterly”. Благодаря деятельности Фибоначчи-Ассоциации и книгам Воробьева [9], Хогатта [10], Вайды [11] и других математиков в современной математике сформировалось новое научное направление, которое получило название **«теории чисел Фибоначчи».**

В 1992 г. группа славянских ученых из России, Украины, Беларуси и Польши организовали так называемую **“Славянскую «Золотую» Группу».** По инициативе этой группы были проведены **Международные симпозиумы «Золотое Сечение и Проблемы Гармонии Систем»** сначала в Киеве (Украина, 1992, 1993), а затем в Ставрополе (Россия, 1994, 1995, 1996). В последние десятилетия западными и славянскими учеными было опубликовано ряд интересных книг в области золотого сечения [8-35]. Сам факт публикации достаточно обширного перечня книг по проблеме золотого сечения является достаточно симптоматичным и свидетельствует об актуальности проблемы золотого сечения в современной науке

Современные научные открытия, основанные на золотом сечении и Платоновых телах.

Золотое сечение, пентаграмма и Платоновы тела широко использовались астрологией и эзотерическими науками, что стало одной из причин негативного отношения классической «материалистической» науки к золотому сечению и Платоновым телам. Однако, все попытки «материалистической» науки и математики забыть «золотое сечение» и Платоновы тела и выбросить их вместе с астрологией и эзотерическими науками на «свалку сомнительных научных концепций», закончились полным провалом. Уже Иоганн Кеплер нашел «фибоначчиевые» спирали на поверхности филлотаксисных объектов. «Геометрия Боднара» [21,33] стала блестящим доказательством того факта, что именно золотое сечение и числа Фибоначчи лежат в основе геометрии живой Природы. «Закон структурной гармонии систем», сформулированный Эдуардом Сороко [8, 15], подтвердил всеобщий характер процессов самоорганизации систем любой природы и показал, что все самоорганизующиеся системы основаны на «золотых *р*-пропорциях». Квази-кристаллы Шехтмана и фуллерены (Нобелевская Премия 1996 г.) подтвердили гениальное предсказание Феликса Клейна о фундаментальной роли икосаэдра в науке и математике. **Наконец, «золотые» геноматрицы Сергея Петухова [36] завершают перечень выдающихся современных научных открытий, основанных на «золотом сечении» и Платоновых телах.**

Золотое сечение в науке 21-го века

Начало 21-го века отмечено рядом интересных публикаций и событий, которые имеют прямое отношение к числам Фибоначчи и золотому сечению. Прежде всего, необходимо отметить проведение **Международных конференций по числам Фибоначчи и их приложениям**, организованных Фибоначчи-Ассоциацией в 2002 г. (штат Аризона, США), в 2004 г. (Брауншвейг, Германия) и в 2006 г. (Сан Франциска, Калифорния, США). В 2003 г. на Украине (Винница) была проведена **Международная конференция «Проблемы Гармонии, Симметрии и Золотого Сечения в Природе, Науке и Искусстве».** Конференция была проведена по инициативе Славянской «Золото» Группы, которая на Конференции была преобразована в **Международный Клуб Золотого Сечения**. В 2005 г. Академия Тринитаризма (Россия) организовала **Институт Золотого Сечения**, который является официальным органом Международного Клуба Золотого Сечения.

На рубеже 20-го и 21-го столетий западными и славянскими авторами было опубликовано ряд научных книг в области золотого сечения и его приложений. Наиболее интересными из них являются следующие:

(1) Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaons to Fractals. 1999 (русский перевод, 2002) [26].

(2) Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition, 2001 [28].

(3) Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapore, Second edition, 2002 [29].

(4) Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресение, 2000 [27].

(5) Vera W. de Spinadel, From the Golden Mean to Chaos, Nueva Libreria, Second edition, Nobuko, 2004 [23].

(6) Петруненко В.В. Золотое сечение в квантовых состояниях и своих астрономических и физических проявлениях. Минск: Право и экономика, 2005 [32].

(7) Боднар О.Я. Золотий переріз і невклідова геометрія в нвуці та мисецтві. Львів: Українські технології, 2005 [33]

(8) Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: Изд-во "URSS", 2006 [8].

(9) Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006 [34].

(10) Olsen Scott. The Golden Section: Nature's Greatest Secret, 2006 [35].

Этот перечень подтверждает огромный интерес к золотому сечению в науке 21-го века. Этот интерес подтверждается и огромным количеством научных статей на эту тему, опубликованных на рубеже 20-21-го столетий [36-58]. Особенностью науки 21-го века является возрастание интереса к золотому сечению в теоретической физике. Характерным примером в этом отношении является публикация книги В.В. Петруненко [32], а также научного сборника «Метафизика. Век XXI» [57], подготовленного известным российским физиком-теоретиком Ю.С. Владимировым. Сборник состоит из 3-х частей. Третья часть сборника всецело посвящена проблеме «золотого сечения». Эта часть сборника открывается двумя статьями – статьей А.П. Стахова «Золотое сечение,священная геометрия и математика гармонии» [58], в которой дается детальное обоснование «Математики Гармонии» как нового междисциплинарного направления современной науки, и статьей С.В. Петухова «Метафизические аспекты матричного анализа генетического кода и золотое сечение» [36], в которой описано крупное научное открытие – «золотые» геноматрицы, свидетельствующее об удивительной математической связи «золотого сечения» с генетическим кодом.

6. Математика Гармонии как новое междисциплинарное направление современной науки

Лекция "The Golden Section and Modern Harmony Mathematics"

К концу 20-го века предмет «теории чисел Фибоначчи» [9-11] значительно расширился. Было получено огромное количество обобщений чисел Фибоначчи и золотого сечения, а также получено много неожиданных приложений чисел Фибоначчи и золотого сечения, имеющих приложения в теоретической физике (гиперболические функции Фибоначчи и Люка [39]), в компьютерной науке (коды Фибоначчи и золотой пропорции [12, 14, 18]), в ботанике (закон преобразования спиральных биосимметрий [21, 33]) и даже философии (закон структурной гармонии систем [8, 15]) и т.д. Стало ясно, что новые результаты в этой области далеко выходят за рамки традиционной «Теории чисел Фибоначчи» [9-11]. Более того, стало ясно, что само название «теория чисел Фибоначчи» значительно суживает содержание этого научного направления, которое направлено на изучение математических моделей гармонии систем. Поэтому возникла идея объединить новые результаты в теории золотого сечения и чисел Фибоначчи и их приложения под флагом нового междисциплинарного направления современной науки, получившего название «Математика Гармонии». Именно такая идея была изложена автором в лекции **"The Golden Section and Modern Harmony Mathematics",** прочитанной автором на 7-й Международной конференции по числам Фибоначчи и их приложениям (Грац, Австрия, июль 1996 г.). Лекция была опубликована в научном сборнике "Applications of Fibonacci Numbers" [37].

После 1996 г. автор продолжал развивать и углублять эту идею в статьях [40-54]. Однако, создание «Математики Гармонии» является итогом коллективного творчества, поскольку работы выдающихся исследователей в области чисел Фибоначчи и золотого сечения Николая Воробьева [9], Gardner Martin [59], H. S. M. Coxeter [58], George Polya [61], Verner Hoggat [10], Alfred Renyi [62], Stephen Vaida [11], Эдуарда Сороко [8, 15], Олега Боднара [21,33], Николая Васютинского [19], Виктора Коробко [24], Иосифа Шевелева [27], Сергея Петухова [36], Roger Herz-Fishler [7], Jay Kappraff [28, 29], Midhat Gazale [26], Vera W. de Spinadel [23], R.A. Dunlap [22], Scott Olsen [35], Александра Татаренко [63] и других оказали непосредственное влияние на исследования автора в области Математики Гармонии.

«Математика Гармонии» в своих истоках восходит к Евклидовой проблеме о «делении в крайнем и среднем отношении» («золотое сечение») [7] и является дальнейшим развитием традиционной «Теории чисел Фибоначчи» [9-11]. Какие же цели ставит перед собой эта новая математика? Подобно «классической математике», которую иногда определяют как «науку о моделях» [5], «Математику Гармонии» следует рассматривать как «науку о моделях гармонических процессов», протекающих в окружающем нас мире.

7. Основные результаты и теории «Математики Гармонии»

По мнению автора, следующие математические результаты и теории лежат в основе «Математики Гармонии»:

1. Традиционная теория чисел Фибоначчи, изложенная в известных книгах [9-11, 22] и многочисленных статьях, опубликованных в журнале "The Fibonacci Quarterly".

Однако, обобщения золотого сечения, чисел Фибоначчи и Люка, которые могут быть использованы при моделировании «гармонических проессов», являются основным оригинальными результатами «Математики Гармонии».

2. **Обобщенные *p*-числа Фибоначчи [12].** Во второй половине 20-го столетия многие известные математики (Martin Gardner [59], George Polya [61], Alred Renyi [62] и другие) независимо друг от друга установили связь чисел Фибоначчи с треугольником Паскаля и биномиальными коэффициентами. В начале 70-х годов 20-го столетия Алексей Стахов в своей докторской диссертации [64], а затем в книге [12] ввел в рассмотрение так называемые обобщенные *p*-числа Фибоначчи, которые задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$F_p(n) = F_p(n\text{-}1)+F_p(n\text{-}p\text{-}1) \quad \text{for} \quad n>p+1$$

$$F_p(0) = 0, F_p(1) = F_p(2) = ... = F_p(p) = 1$$

где p=0, 1, 2, 3, … и n=0, ±1, ±2, ±3, …

Обобщенные p-числа Фибоначчи следующим образом выражаются через биномиальные коэффициенты [12]:

$$F_p(n+1) = C_n^0 + C_{n-p}^1 + C_{n-2p}^2 + C_{n-3p}^3 + C_{n-4p}^4 + ...$$

2. **Обобщенные "золотые» уравнения и обобщенные золотые p-пропорции** [12]. Если взять отношение двух соседних p-чисел Фибоначчи $F_p(n)/F_p(n\text{-}1)$ и устремить число n в бесконечность, мы придем к обобщенному «золотому» уравнению следующего типа:

$$x^{p+1} = x^p + 1.$$

Множество положительных корней τ_p обобщенного «золотого» уравнения называются *обобщенными золотыми p-пропорциями.* Для p >0 они образуют новый класс иррациональных чисел, которые выражают новые, неизвестные ранее свойства треугольника Паскаля. Обобщенные золотые p-пропорции обладают следующим математическим свойством:

$$\tau_p^n = \tau_p^{n-1} + \tau_p^{n-p-1} = \tau_p \times \tau_p^{n-1}$$

3. **Обобщение задачи о «золотом сечении» [12].** Следующее деление отрезка AB точкой C

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p \ (p=0, 1, 2, 3, \ldots)$$

является широким обобщением классического золотого сечения (p=1).

4. **Обобщенная формула Бине для p-чисел Фибоначчи [49]:**

$$F_p(n) = k_1(x_1)^n + k_2(x_2)^n + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ – корни «золотого» алгебраического уравнения $x^{p+1} = x^p + 1$, и $k_1, k_2, \ldots, k_{p+1}$ – постоянные коэффициенты, решения следующей системы алгебраических уравнений:

$$F_p(0) = k_1 + k_2 + \ldots + k_{p+1} = 0$$
$$F_p(1) = k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_{p+1}x_{p+1} = 1$$
$$F_p(2) = k_1(x_1)^2 + k_2(x_2)^2 + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^3 = 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_p(p) = k_1(x_1)^p + k_2(x_2)^p + \ldots + k_{p+1}(x_{p+1})^p = 1$$

5. **Обобщенные p-числа Люка [49]:**

$$L_p(n) = L_p(n\text{-}1) + L_p(n\text{-}p\text{-}1) \quad \text{for} \quad n>p+1;$$

$$L_p(0) = p+1, \ L_p(1) = L_p(2) = ... = L_p(p) = 1$$

где p=0, 1, 2, 3, … и n=0, ±1, ±2, ±3, …

6. **Обобщенная формула Бине для p-чисел Люка [49]:**

$$L_p(n) = (x_1)^n + (x_2)^n + \ldots + (x_{p+1})^n$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_{p+1}$ – корни обобщенного «золотого» уравнения $x^{p+1} = x^p + 1$.

7. **Q-матрица Фибоначчи [10]:**

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Q^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}$$

$$\text{Det } Q^n = F_{n-1} F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n.$$

$$
\begin{array}{cccccccccc}
n & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
Q^n & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}3&2\\2&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}8&5\\5&3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}13&8\\8&5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}21&13\\13&8\end{pmatrix} \\
Q^{-n} & \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}0&1\\1&-1\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}1&-1\\-1&2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-1&2\\2&-3\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}2&-3\\-3&5\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-3&5\\5&-8\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}5&-8\\-8&13\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}-8&13\\13&-21\end{pmatrix}
\end{array}
$$

8. **Обобщенные Q_p-матрицы Фибоначчи [40]:**

$$
Q_p = \begin{pmatrix}
1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\
1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{pmatrix} \quad (p=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)
$$

$$
Q_p^n = \begin{pmatrix}
F_p(n+1) & F_p(n) & \cdots & F_p(n-p+2) & F_p(n-p+1) \\
F_p(n-p+1) & F_p(n-p) & \cdots & F_p(n-2p+2) & F_p(n-2p+1) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
F_p(n-1) & F_p(n-2) & \cdots & F_p(n-p) & F_p(n-p-1) \\
F_p(n) & F_p(n-1) & \cdots & F_p(n-p+1) & F_p(n-p)
\end{pmatrix}
$$

$$\mathrm{Det}\, Q_p^n = (-1)^{np}.$$

9. **Обобщенные числа Фибоначчи и Люка m-го порядка [23, 26, 29, 63]:**

$$F_m(n) = mF_m(n-1) + F_m(n-2)$$

$$F_m(0) = 0,\ F_m(1) = 1,$$

$$L_m(n) = mL_m(n-1) + L_m(n-2)$$

$$L_m(0) = 2,\ L_m(0) = m$$

где m – положительное действительное число, $n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots$.

10. **«Золотое» алгебраическое уравнение m-го порядка [23, 26, 29, 63]:**

$$x^2 - mx - 1 = 0$$

где m – положительное действительное число. Корни «золотого» алгебраического уравнения m-го порядка равны:

$$x_1 = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2} \qquad\qquad x_2 = \frac{-\sqrt{4+m^2}+m}{2}$$

11. Обобщенные золотые пропорции m-го порядка [23, 26, 29, 63]:

$$\Phi_m = \frac{\sqrt{4+m^2}+m}{2}$$

$$m = \Phi_m - \frac{1}{\Phi_m}; \qquad \Phi_m + \frac{1}{\Phi_m} = \sqrt{4+m^2}\,; \qquad \Phi_m^n = m\Phi_m^{n-1} + \Phi_m^{n-2}$$

$$\Phi_m = \sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{1 + m\sqrt{\ldots}}}} \qquad \Phi_m = m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \cfrac{1}{m + \ldots}}}$$

12. Формула Газале для обобщенных чисел Фибоначчи и Люка *m*-го порядка [26]:

$$F_m(n) = \frac{\Phi_m^n - (-1)^n \Phi_m^{-n}}{\sqrt{4 + m^2}} \qquad L_m(n) = \Phi_m^n + (-1)^n \Phi_m^{-n}$$

гдее m – положительное действительное число, Φ_m – обобщенная золотая пропорция m-го порядка, n=0, ±1, ±2, ±3, …

13. G_m-матрицы Фибоначчи *m*-го порядка [65]:

$$G_m = \begin{pmatrix} m & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G_m^n = \begin{pmatrix} F_m(n+1) & F_m(n) \\ F_m(n) & F_m(n-1) \end{pmatrix}$$

где m – положительное действительное число, n=0, ±1, ±2, ±3, …

$$\mathrm{Det}\ G_m^n = F_m(n+1) \times F_m(n-1) - F_m^2(n) = (-1)^n.$$

$$G_m^n = mG_m^{n-1} + G_m^{n-2}$$

Последовательность матриц типа G_2^n

n	0	1	2	3	4	5
G_2^n	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 12 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 29 & 12 \\ 12 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 70 & 29 \\ 29 & 12 \end{pmatrix}$
G_2^{-n}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -12 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -12 \\ -12 & 29 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -12 & 29 \\ 29 & -70 \end{pmatrix}$

Последовательность матриц типа G_3^n

n	0	1	2	3	4	5
G_3^n	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 33 & 10 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 109 & 33 \\ 33 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 360 & 109 \\ 109 & 33 \end{pmatrix}$
G_3^{-n}	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 10 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 10 \\ 10 & -33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 10 & -33 \\ -33 & 109 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -33 & 109 \\ 109 & -360 \end{pmatrix}$

14. **Гиперболические функции Фибоначчи и Люка [39, 42, 65]**

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка (определение Стахова и Ткаченко)[39]:

$$sFx = \frac{\tau^{2x} - \tau^{-2x}}{\sqrt{5}} \qquad cFx = \frac{\tau^{2x+1} + \tau^{-(2x+1)}}{\sqrt{5}}$$

$$sLx = \tau^{2k+1} - \tau^{-(2k+1)} \qquad cLx = \tau^{2k} + \tau^{-2k}$$

где $\tau \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотая пропорция).

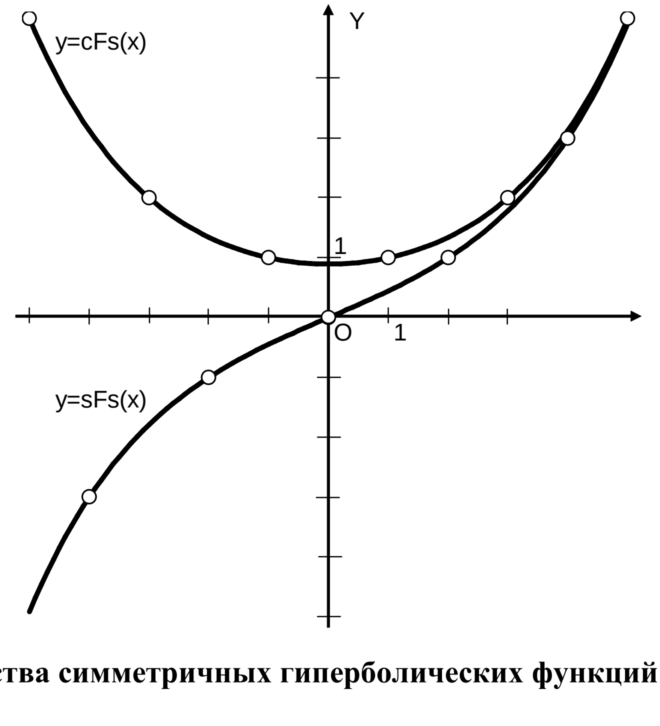
Симметричные гиперболические функции Фибоначчи и Люка (определение Стахова и Розина)[42]:

$$sFs(x) = \frac{\tau^{x} - \tau^{-x}}{\sqrt{5}} \qquad cFs(x) = \frac{\tau^{x} + \tau^{-x}}{\sqrt{5}}$$

$$sLs(x) = \tau^{x} - \tau^{-x} \qquad cLs(x) = \tau^{x} + \tau^{-x}$$

где $\tau \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотая пропорция).

Графики симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка



15. Рекурсивные свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка

Тождества для чисел Фибоначчи и Люка	Тождества для симметричных гиерболических функций Фибоначчи и Люка	
$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$	$sFs(x+2) = cFs(x+1) + sFs(x)$	$cFs(x+2) = sFs(x+1) + cFs(x)$
$F_n = (-1)^n F_{-n}$	$sFs(x) = - sFs(-x)$	$cFs(x) = cFs(-x)$
$F_{n+3} + F_n = 2 F_{n+2}$	$sFs(x+3)+cFs(x) = 2cFs(x+2)$	$cFs(x+3)+sFs(x)=2sFs(x+2)$

$F_{n+3} - F_n = 2F_{n+1}$	$sFs(x+3) - cFs(x) = 2sFs(x+1)$	$cFs(x+3) - sFs(x) = 2cFs(x+1)$
$F_{n+6} - F_n = 4F_{n+3}$	$sFs(x+6) + sFs(x) = 4cFs(x+3)$	$cFs(x+6)+cFs(x) = 4sFs(x+3)$
$F_n^{\ 2} - F_{n+1} F_{n-1} = (-1)^{n+1}$	$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)\ cFs(x-1) = -1$	$[cFs(x)]^2 - sFs(x+1)\ sFs(x-1) = 1$
$F_{2n+1} = F_{n+1}^{\ 2} + F_n^{\ 2}$	$cFs(2x+1)=[cFs(n+1)]^2 + [cFs(x)]^2$	$cFs(2x+1)=[sFs(n+1)]^2 + [sFs(x)]^2$
$F_{3n} = F_{n+1}^{\ 3} + F_n^{\ 3} - F_{n-1}^{\ 3}$	$sFs(3x) = [cFs(x+1)]^3+[sFs(x)]^3-$ $-[cFs(x-1)]^3$	$cFs(3x) =[sFs(x+1)]^3+[cFs(x)]^3-$ $- [sFs(x-1)]^3$
$L_{n+2} = L_{n+1} + L_n$	$sLs(x+2) = cLs(x+1) + sLs(x)$	$cLs(x+2) = sLs(x+1) + cLs(x)$
$L_n = (-1)^n \mathrm{L}_{-n}$	$sLs(x) = - sLs(x)$	$cLs(x) = cLs(-x)$
$L_n^2 - 2(-1)^n = L_{2n}$	$[sLs(x)]^2 + 2 = cLs(2x)$	$[cLs(x))^2 - 2 = cLs(2x)$
$L_n + L_{n+3} = 2L_{n+2}$	$sLs(x) + cLs(x+3) = 2sLs(x+2)$	$cLs(x) + sLs(x+3) = 2cLs(x+2)$
$L_{n+1} L_{n-1} - L_n^2 = -5\ (-1)^n$	$sLs(x+1)\ sLs(x-1) - [cLs(x)]^2= - 5$	$cLs(x+1)\ cLs(x-1) - [sLs(x)]^2= 5$
$F_{n+3} - 2F_n = L_n$	$sFs(x+3) - 2cFs(x) = sLs(\mathrm{x})$	$cFs(x+3) - 2sFs(x) = cLs(x)$
$L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n$	$sLs(x-1) + sLs(x+1) =$ $= 5sFs(x)$	$cLs(x-1) + cLs(x+1) = 5cFs(x)$
$L_n + 5F_n = 2L_{n+1}$	$sLs(x) +5cFs(x) = cLs(x+1)$	$cLs(x) +5sFs(x) = sLs(x+1)$
$L_{n+1}^{\ 2} + L_n^{\ 2} = 5F_{2n+1}$	$[sLs(x+1)]^2 + [sLs(x)]^2 =$ $= 5cFs(x)$	$[cLs(x+1)]^2 + [cLs(x)]^2 = 5cFs(x)$

16. Гиперболические свойства симметричных гиперболических функций Фибоначчи и Люка:

$$[cFs(x)]^2 - [sFs(x)]^2 = 4/5\ .$$

$$[cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} cFs(x+y) = cFs(x)cFs(y) + sFs(x)sFs(y)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}} cFs(x\text{-}y) = cFs(x)cFs(y) - sFs(x)sFs(y)$$

$$2cLs(x\pm y) = cLs(x)cLs(y) \pm sLs(x)sLs(y)$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}} sFs(2x) = sFs(x)cFs(x)$$

$$sLs(2x) = sLs(x)cLs(x)$$

$$[cFs(x) \pm sFs(x)]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} [cFs(nx) \pm sFs(nx)]$$

$$[cFs(x) \pm sFs(x)]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^{n-1} [cFs(nx) \pm sFs(nx)]$$

17. **Золотой Шофар [43]**

Трехмерная спираль Фибоначчи

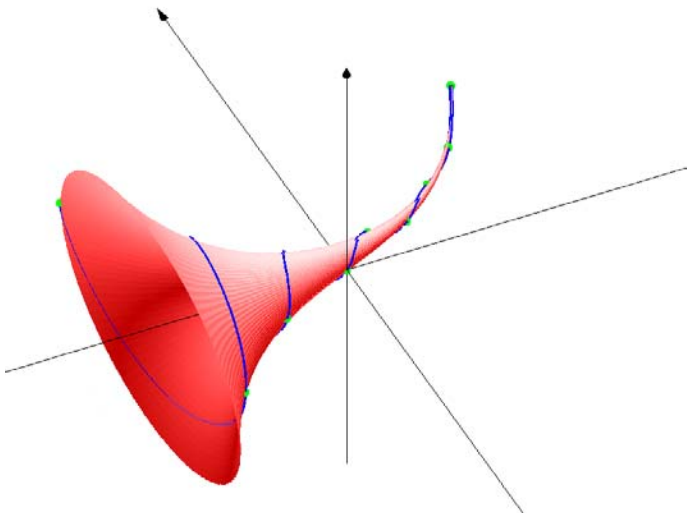
$$S_F(x) = \frac{\tau^x \quad - \quad \cos(\pi x) \quad \tau^{-x}}{\sqrt{5}} + i\,\frac{\sin(\pi x) \quad \tau^{-x}}{\sqrt{5}}$$

где $\tau \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотая пропорция).

Золотой Шофар

$$\left(y - \frac{\tau^x}{\sqrt{5}}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{\tau^{-x}}{\sqrt{5}}\right)^2,$$

где $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (золотая пропорция).



18. Гиперболические функции Фибоначчи и Люка *m*-го порядка [65]

Гиперболический синус Фибоначчи m-го порядка

$$sF_m(x) = \frac{\Phi_m^x - \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+m^2}}\left[\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x - \left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x}\right]$$

Гиперболический косинус Фибоначчи m-го порядка

$$cF_m(x) = \frac{\Phi_m^x + \Phi_m^{-x}}{\sqrt{4+m^2}} = \frac{1}{\sqrt{4+m^2}}\left[\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x + \left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^{-x}\right]$$

Гиперболический синус Люка m-го порядка

$$sL_m(x)=\Phi_m^x-\Phi_m^{-x}=\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x-\left(\frac{m+\sqrt{4+\sqrt{4+m^2}}}{2}\right)^{-x}$$

Гиперболический косинус Люка m-го порядка

$$cL_m(x)=\Phi_m^x+\Phi_m^{-x}=\left(\frac{m+\sqrt{4+m^2}}{2}\right)^x+\left(\frac{m+\sqrt{4+\sqrt{4+m^2}}}{2}\right)^{-x}$$

где m – положительное действительное число, Φ_m – обобщенная золотая пропорция m-го порядка.

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка 1-го порядка

$$sF_1(x)=\frac{\Phi_1^x-\Phi_1^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$csF_1(x)=\frac{\Phi_1^x+\Phi_1^{-x}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$sL_1(x)=\Phi_1^x-\Phi_1^{-x}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}$$

$$csL_1(x)=\Phi_1^x-\Phi_1^{-x}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^x+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{-x}$$

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка 2-го порядка

$$sF_2(x)=\frac{\Phi_2^x-\Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x-\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right]$$

$$cF_2(x)=\frac{\Phi_2^x+\Phi_2^{-x}}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\left(1+\sqrt{2}\right)^x+\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}\right]$$

$$sL_2(x)=\Phi_2^x-\Phi_2^{-x}=\left(1+\sqrt{2}\right)^x-\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}$$

$$cL_2(x)=\Phi_2^x+\Phi_2^{-x}=\left(1+\sqrt{2}\right)^x+\left(1+\sqrt{2}\right)^{-x}$$

Гиперболические функции Фибоначчи и Люка 3-го порядка

$$sF_3(x)=\frac{\Phi_3^x-\Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$cF_3(x)=\frac{\Phi_3^x+\Phi_3^{-x}}{\sqrt{13}}=\frac{1}{\sqrt{13}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x+\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}\right]$$

$$sL_3(x)=\Phi_3^x-\Phi_3^{-x}=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x-\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}$$

$$sL_3(x)=\Phi_3^x+\Phi_3^{-x}=\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^x+\left(\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right)^{-x}$$

Рекурсивные свойства

$sF_m(x+2) = mcF_m(x+1) + sF_m(x)$ $\qquad$ $cF_m(x+2) = msF_m(x+1) + cF_m(x)$

$[sFs(x)]^2 - cFs(x+1)\,cFs(x-1) = -1$ $\qquad$ $[cFs(x)]^2 - sFs(x+1)\,sFs(x-1) = 1$

Гиперболические свойства

$$[cF_m(x)]^2 - [sF_m(x)]^2 = \frac{4}{4+m^2} \qquad [cLs(x)]^2 - [sLs(x)]^2 = 4$$

$$\frac{2}{\sqrt{4+m^2}}\,cF_m(x+y) = cF_m(x)cF_m(y) + sF_m(x)sF_m(y)$$

$$\frac{2}{\sqrt{4+m^2}}\,cF_m(x-y) = cF_m(x)cF_m(y) - sF_m(x)sF_m(y)$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\,cF_m(2x) = [cF_m(x)]^2 + [sF_m(x)]^2 \qquad 2cL_m(2x) = [cL_m(x)]^2 + [sL_m(x)]^2$$

$$[cF_m(x) \pm sF_m(x)]^n = \left(\frac{2}{\sqrt{4+m^2}}\right)^{n-1}[cF_m(nx) \pm sF_m(nx)]$$

$$[cL_m(x) \pm sL_m(x)]^n = 2^{n-1}[cF_m(nx) \pm sF_m(nx)]$$

19. «Золотые» матрицы [52]

«Золотые» матрицы, основанные на симметричных гиперболических функциях Фибоначчи

$$Q^{2x} = \begin{pmatrix} cFs(2x+1) & sFs(2x) \\ sFs(2x) & cFs(2x-1) \end{pmatrix}$$

$$Q^{2x+1} = \begin{pmatrix} sFs(2x+2) & cFs(2x+1) \\ cFs(2x+1) & sFs(2x) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\ Q^{2x} = cFs(2x+1)\times cFs(2x-1) - [sFs(2x)]^2 = 1$$

$$\mathrm{Det}\ Q^{2x+1} = sFs(2x+2)\times sFs(2x) - [cFs(2x+1)]^2 = -1$$

«Золотые» матрицы, основанные на гиперболических функциях Фибоначчи m-го порядка

$$G_m^{2x} = \begin{pmatrix} cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \\ sF_m(2x) & cF_m(2x-1) \end{pmatrix}$$

$$G_m^{2x+1} = \begin{pmatrix} sF_m(2x+2) & cF_m(2x+1) \\ cF_m(2x+1) & sF_m(2x) \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Det}\ G_m^{2x} = cF_m(2x+1)\times cF_m(2x-1) - [sF_m(2x)]^2 = 1$$

$$\mathrm{Det}\ G_m^{2x+1} = sF_m(2x+2)\times sF_m(2x) - [cF_m(2x+1)]^2 = -1$$

20. Алгоритмическая теория измерения [12]

Основная рекуррентная формула алгоритмической теории измерения

$$F_p(n, k) = F_p(n; \underbrace{0,0,\ldots,0}_{t}, p_{t+1}, p_{t+2}, \ldots, p_k) =$$

$$= \sum_{j=0}^{t} F_p(n\text{-}1;\ \underbrace{0,0,\dots,0}_{j},\ p_{t+1}-1,\ p_{t+2}-1,\ \dots,\ p_k-1,\ \underbrace{p,p,\dots,p}_{t-j})$$

Неожиданные результаты

$$\begin{tikzcd}
 & p=0 & 0 \le p \le \infty & p=\infty & \\
k \ge 1 & \boxed{(k+1)^n} \arrow[d] & \boxed{F_p(n,k)} \arrow[l] \arrow[r] \arrow[d] & \boxed{C_{n+k}^{k} = C_{n+k}^{n}} \arrow[d] & \text{Бином. коэфф.} \\
k = 1 & \boxed{2^n} & \boxed{F_p(n) = F_p(n\text{-}1) + F_p(n\text{-}p\text{-}1)} \arrow[l] \arrow[r] & \boxed{n+1} &
\end{tikzcd}$$

Двоичная последовательность | Обобщенные p-числа Фибоначчи | Натуральные числа

21. Фибоначчи-представления

Представление Цекендорфа

$$N = a_n F_n + a_{n-1} F_{n-1} + \dots + a_i F_i + \dots + a_1 F_1$$

P-коды Фибоначчи [12]

$$N = a_n F_p(n) + a_{n-1} F_p(n\text{-}1) + \dots + a_i F_p(i) + \dots + a_1 F_p(1)$$

где p=0, 1, 2, 3, …

Для p=0 p-код Фибоначчи сводится к двоичному представлению

$$N = a_n 2^{n-1} + a_{n-1} 2^{n-2} + \dots + a_i 2^{i-1} + \dots + a_1 2^0 .$$

для p=1 – к представлению Цекендорфа, , for p=∞ - к унитарному коду $N = \underbrace{1+1+\dots+1}_{N}$

22. Системы счисления с иррациональными основаниями и новое определение действительного числа

Система счисления Бергмана [66]

$$A = \sum_i a_i \tau^i ,$$

где A – некоторое действительное число, a_i – двоичная цифра (0 или 1) i-го разряда, i = 0, ±1, ±2, ±3, …, τ^i – вес i-го разряда, $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ - основание системы счисления.

Коды золотой p-пропорции [14]

$$A = \sum_i a_i \tau_p^i ,$$

где a_i – двоичная цифра i-го разряда; τ_p^i - вес i-го разряда; τ_p – основание системы счисления, i = 0, ±1, ±2, ±3, … .

Для случая p=0 код золотой p-пропорции сводится к двоичному представлению, $A = \sum_i a_i 2^i$ а для случая p=1 – к системе счисления Бергмана.

23. Троичная зеркально-симметричная арифметика [41]

Троичное зеркально-симметричное представление

$$N = \sum_i c_i \tau^{2i} \quad ,$$

где c_i – троичная цифра (1, 0, $\bar{1}$) i-го разряда; τ^{2i} – вес i-го разряда; $\tau^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ - основание системы счисления, i = 0, ±1, ±2, ±3, … .

Троичное зеркально-симметричное сложение

b_k \ a_k	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	$\bar{1}\,1\,\bar{1}$	$\bar{1}$	0
0	$\bar{1}$	0	1
1	0	1	$1\,\bar{1}\,1$

Троичное зеркально-симметричное умножение

b_k \ a_k	$\bar{1}$	0	1
$\bar{1}$	1	0	$\bar{1}$
0	0	0	0
1	$\bar{1}$	1	1

24. Новая теория кодирования, основанная на Q_p-матрицах Фибоначчи [25, 51]

Метод кодирования-декодирования

Кодирование	Декодирование
$M \times Q_p^n = E$	$E \times Q_p^{-n} = M$

где M – информационная матрица, E – кодовая матрица, Q_p^n - кодирующая матрица, Q_p^{-n} - декодирующая матрица.

Основное контрольное соотношение

$$\mathrm{Det}\, E = \mathrm{Det}\, M \times (-1)^{pn}$$

где p=1, 2, 3, …, n = 0, ±1, ±2, ±3, …

25. «Золотая» криптография [52, 65]

Алгоритм шифрации-дешифрации

Шифрация	Дешифрация
$M\times Q^{2x} = E_1(x)$	$E_1(x)\times Q^{-2x} = M$
$M\times Q^{2x+1} = E_2(x)$	$E_2(x)\times Q^{-2x+1} = M$

Здесь M – информационная матрица, $E_1(x)$ и $E_2(x)$ – кодовые матрицы, Q^{2x} и Q^{2x+1} – кодирующие матрицы; Q^{-2x} и Q^{-2x+1} – декодирующие матрицы, x – криптографический ключ.

Основные контрольные соотношения

$$\mathrm{Det}\, E_1(x) = \mathrm{Det}\, M \qquad \mathrm{Det}\, E_2(x) = -\mathrm{Det}\, M$$

Метод шифрации-дешифрации, основанный на матрицах типа G_m

Шифрация	Дешифрация
$M\times G_m^{2x} = E_1(x, m)$	$E_1(x,m)\times G_m^{-2x} = M$
$M\times G_m^{2x+1} = E_2(x,m)$	$E_2(x,m)\times G_m^{-2x-1} = M$

Здесь M – информационная матрица, $E_1(x, m)$, $E_2(x, m)$ – кодовые матрицы; G_m^{2x}, G_m^{2x+1} кодирующие матрицы; G_m^{-2x} и G_m^{-2x-1} - декодирующие матрицы, x и m – криптографические ключи.

Основные контрольные соотношения

$$\mathrm{Det}\, E_1(x,m) = \mathrm{Det}\, M \qquad \mathrm{Det}\, E_2(x,m) = -\mathrm{Det}\, M$$

Заключение

На заре зарождения математики возникло три «ключевые» проблемы, которые стимулировали развитие математики:

(1) **Проблема счета**
(2) **Проблема измерения**
(3) **Проблема гармонии**

В каждом из этих направлений уже в античный период были сделаны «ключевые» математические открытия:

(1) **Позиционный принцип представления чисел,** который был положен в основу всех основных систем счисления (Вавилонской 60-ричной, десятичной, двоичной). Развитие этого направления, в конечном итоге, привело к формированию понятия **натурального числа** и созданию **теории чисел –** первой фундаментальной теории математики.

(2) **Открытие несоизмеримых отрезков,** сделанное пифагорейцами, привело к первому кризису в основаниях математики. Развитие этого направления привело к открытию **иррациональных чисел** и созданию **теории измерения,** второй фундаментальной теории математики. В конечном итоге, понятие натурального и иррационального числа и стали теми основополагающими понятиями, которые были положены в основу всех математических теорий «классической математики», включая, теорию чисел, алгебру, геометрию, интегральное и дифференциальное исчисление. Важными задачами «классической математики» является

создание математического аппарата для моделирования физических явлений (теоретическая физика) и процессов обработки информации («классическая информатика»).

Однако одновременно с «классической математикой» в античной науке начало развиваться еще одно математическое направление – Математика Гармонии, которое берет начало от еще одной «ключевой» идеи античной науки – проблемы Гармонии, которая лежит в основе Учения о Числовой Гармонии Мироздания, разработанного Пифагором.

«Ключевым» математическим открытием античной математики в этом направлении является **«деление в крайнем и среднем отношении»** («золотое сечение»), введенное Евклидом в Книге II его «Начал» (Теорема II, 11). Развитие этого направления привело к созданию в современной науке «Теории чисел Фибоначчи и золотого сечения» [9-11]. Однако, расширение приложений чисел Фибоначчи и Золотого Сечения в современной науке, а также их обобщения привели к выдвижению концепции «Математики Гармонии» [37] как нового междисциплинарного направления современной науки и математики, которое может привести к созданию новой теоретической физики – «золотой» теоретической физики, основанной на новых «золотых» гиперболических моделях природы [31, 39, 42, 65], а также новой информатике – «золотой» информатике, основанной на новой теории кодирования и криптографии [25, 51, 52, 65].

Путь развития математики, начиная с ее «ключевых» проблем, показан на Рис. 1.

Рисунок 1. «Ключевые» проблемы античной математики и новые направления развития математики, теоретической физики и информатики

Литература

[1] Колмогоров А.Н. Математика в ее историческом развитии. Москва: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1961.
[2] Колмогоров А.Н. Математика. БСЭ-2. 1954, том. 26, с. 464-483.
[3] Башмакова И.Г., Юшкевич А.П. Происхождение систем счисления. - Энциклопедия Элементарной Математики, том 1 «Арифметика». Москва: Гостехидат, 1951.
[4] Лебег А. Об измерении величин. Москва: Учпедгиз, 1960.
[5] Илиев Л. Математика как наука о моделях. Успехи математических наук , 1972, том 27, выпуск 2.
[6] Лосев А.Ф. История философии как школа мысли. Коммунист, 1981, №11.
[7] Roger Herz-Fishler. A Mathematical History of the Golden Number. New York: Dover Publications, 1998.
[8] Сороко Э.М. Золотые сечения, процессы самоорганизации и эволюции систем. Введение в общую теорию гармонии систем. Москва: Изд-во “URSS”, 2006.
[9] Воробьев Н.Н. Числа Фибоначчи. Москва: Наука, 1961
[10] Hoggat V.E. Fibonacci and Lucas Numbers. - Palo Alto, CA: Houghton-Mifflin; 1969.
[11] Vajda S. Fibonacci & Lucas Numbers, and the Golden Section. Theory and Applications. - Ellis Horwood limited; 1989.
[12] Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. Москва: Советское радио, 1977.
[13] Стахов А.П. Алгоритмическая теория измерения. Москва: Знание, 1979.
[14] Стахов А.П. Коды золотой пропорции. Москва: Радио и связь, 1984.
[15] Сороко Э.М. Структурная гармония систем. Минск: Наука и техника, 1984.
[16] Grzedzielski Jan. Energetycno-geometryczny kod Przyrody. Warszawa, Warszwskie centrum studenckiego ruchu naukowego, 1986 (in Polen).
[17] Ковалев Ф.В. Золотое сечение в живописи. Киев: Выща школа, 1989.
[18] Помехоустойчивые коды. Компьютер Фибоначчи. Москва: Знание, 1989
[19] Васютинский Н. Золотая пропорция. Москва,Молодая Гвардия, 1990.
[20] Шевелев И.Ш. Марутаев М.А., Шмелев И.П. Золотое Сечение. Три взгляда на природу гармонии. Москва: Стройиздат, 1990.
[21] Боднар О.Я. Золотое Сечение и неевклидова геометрия в Природе и Искусстве. Львов: Свит, 1994.
[22] Dunlap R.A. The Golden Ratio and Fibonacci Numbers. World Scientific Publishing, 1997.
[23] Vera W. de Spinadel, From the Golden Mean to Chaos, Nueva Libreria, 1998, second edition Nobuko, 2004.
[24] Коробко В.И. Золотая пропорция и проблемы гармонии систем. Москва: Ассоциация строительных институтов, 1998.
[25] Stakhov A, Massingue V, Sluchenkova A. Introduction into Fibonacci coding and cryptography. ISBN 5-7768-0638-0. Kharkov: Publishing House “Osnova”, 1999.
[26] Gazale Midhat J. Gnomon. From Pharaons to Fractals. Princeton, New Jersey: Princeton University Press, 1999 (русский перевод, 2002).
[27] Шевелев И.Ш. Метаязык живой природы. Москва: Воскресение, 2000.
[28] Kappraff Jay. Connections. The geometric bridge between Art and Science. Second Edition. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong. World Scientific, 2001.
[29] Kappraff Jay. Beyond Measure. A Guided Tour Through Nature, Myth, and Number. Singapore, New Jersey, London, Hong Kong: World Scientific, 2002.

[30] Livio Mario. The Golden Ratio: The Story of PHI, the World Most Astonishing Number. Broadway Books, 2002.
[31] Stakhov A.P. Hyperbolic Fibonacci and Lucas Functions: A New Mathematics for the Living Nature. Vinnitsa: Publishing House "ITI", 2003.
[32] Петруненко В.В. Золотое сечение в квантовых состояниях и своих астрономических и физических проявлениях. Минск: Право и экономика, 2005.
[33] Боднар О.Я. Золотий переріз і неевклідрова геометрія в науці та мистецтві. Львів: Українські технлогії, 2005
[34] Стахов А.П., Слученкова А.А., Щербаков И.Г. Код да Винчи и ряды Фибоначчи. Санкт-Петербург: Питер, 2006
[35] Olsen Scott. The Golden Section: Nature's Greatest Secret. New York: Walker Publishing Company, 2006.
[36] Петухов С.В. Метафизические аспекты матричного анализа генетического кода и золотое сечение. Метафизика. Век XXI. Москва: Бином, 2006, с. 216-250.
[37] Stakhov AP. The Golden Section and Modern Harmony Mathematics. Applications of Fibonacci Numbers 1998, Vol. 7: 393-399.
[38] Stakhov A. P. The Golden Section in the Measurement Theory. Computers & Mathematics with Applications, 1989, v. 17, No 4-6, 613-638.
[39] Стахов А.П., Ткаченко И.С. Гиперболическая тригонометрия Фибоначчи. Доклады Академии науку Украины, 1993, том 208, No 7, 1993, с. 9-14.
[40] Stakhov AP. A generalization of the Fibonacci *Q*-matrix. Доклады Академии наук Украины, 1999, №9, с. 46-49.
[41] Stakhov AP. Brousentsov's ternary principle, Bergman's number system and ternary mirror-symmetrical arithmetic. The Computer Journal 2002, Vol. 45, No. 2: 222-236.

[42] Stakhov A., Rozin B. On a new class of hyperbolic function. Chaos, Solitons & Fractals, 2004, 23, 379-389.

[43] Stakhov A., Rozin B. The Golden Shofar . Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26:** 677-684.

[44] Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26**: 263-289.

[45] Stakhov AP. Generalized Golden Sections and a new approach to geometric definition of a number. Ukrainian Mathematical Journal 2004, **56:** 1143-1150.
[46] Stakhov A. Fundamentals of a new kind of Mathematics based on the Golden Section. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27 (5):** 1124-1146.

[47] Stakhov A., Rozin B. The "golden" algebraic equations. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27:** 1415-1421.

[48] Stakhov A. The Generalized Principle of the Golden Section and its applications in mathematics, science, and engineering. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **26,** 263-289.

[49]. Stakhov A., Rozin B. Theory of Binet formulas for Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2005, **27:** 1162-1177.

[50] Stakhov A., Rozin B. The continuous functions for the Fibonacci and Lucas *p*-numbers. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **28**: 1014-1025.

[51] Stakhov A. Fibonacci matrices, a generalization of the "Cassini formula", and a new coding theory. Chaos, Solitons & Fractals 2006, **30,** 56-66.

[52] Stakhov A. The “golden” matrices and a new kind of cryptography. Chaos, Solitons & Fractals 2006 (in press).

[53] Stakhov AP. The generalized golden proportions, a new theory of real numbers, and ternary mirror-symmetrical arithmetic. Chaos, Solitons & Fractals (In Press).

[54] Stakhov AP, Rozin BN. The “golden” hyperbolic models of Universe. Chaos, Solitons & Fractals, (In Press).

[55] Kappraff J. and Adamson G.W. The Relationship of the Cotangent Function to Special Relativity Theory, Silver Means, p-cycles, and Chaos Theory. FORMA, Vol 18, No. 4, 2004, 249-262.

[56] Kappraff J., Adamson G.W. Generalized Binet Formulas, Lucas Polynomials, and Cyclic Constants. Forma. Special Issue “Golden Mean”, Volume 19, Number 4. Tokyo: Publishing House “SCIPRESS”, 2004.

[57] Метафизика. Век XXI. Научный сборник. Составитель и редактор Ю. С. Владимиров. Москва: Бином, 2006.

[58] Стахов А.П. Золотое сечение, священная геометрия и математика гармонии. Метафизика. Век XXI. Москва: Бином, 2006, с. 174-215.

[59] Gardner Martin. Mathematics, Magic and Mystery. New York: Publishing House “Dover”, 1952.

[60] Coxeter, H. S. M. Introduction to Geometry, John Wiley and Sons, New York, 1961.

[61] Polya George. Mathematical Discovery (translated from English). Moscow: Publishing House ”Nauka”, 1970 (in Russian).

[62] Renyi Alfred. Trilogy on Mathematics (translated from Hungarian). Moscow: Publishing House “Mir”, 1980 (in Russian).

[63] Татаренко А.А. T_m – принцип – универсальный закон гармонии. Академия Тринитаризма. Москва: Электронная публикация № 77-6567, 10.11.2005 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/009a/02320002.htm

[64] Стахов А.П. Синтез оптимальных алгоритмов аналого-цифрового преобразования. Докторская диссертация, 1972.

[65] А.П. Стахов, Формулы Газале, новый класс гиперболических функций Фибоначчи и Люка и усовершенствованный метод «золотой» криптографии // «Академия Тринитаризма», М., Эл № 77-6567, публ.14098, 21.12.2006 http://www.trinitas.ru/rus/doc/0232/004a/02321063.htm

[66] Bergman, G. A number system with an irrational base. Mathematics Magazine, No 31, 1957, 98-119.